质点运动学

第一节 质点运动的描述

1. 已知质点沿 x 轴做直线运动，其运动方程为 $x=4t-t^2$（m），则前 3.0 s 内，质点位移的大小为__3m__，所通过的路程为__5m__。注意单位

2. 在表达式 $\bar{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 中，位置矢量是__$\vec{r}$__；位移矢量是__$\Delta\vec{r}$__。

3. 已知质点的运动学方程为 $\vec{r}=4t^2\vec{i}+(2t+3)\vec{j}$ (SI)，则该质点的轨道方程为__$x=(y-3)^2$__。

4. 一质点沿直线运动，其速度为 $v=v_0e^{-kt}$（式中 k,v_0 为常量）。当 $t=0$ 时，质点位于坐标原点，则此质点的运动方程为__$\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$__

5. 一质点做曲线运动，则下列说法正确的是　[B]

A 质点沿 x 轴运动，若加速度 $a<0$，则质点必做减速运动

B 在曲线运动中质点的加速度必定不为零

C 当质点做抛体运动时其 a_t 和 a_n 是不断变化的，因此 a 也是不断变化的

D 若质点的加速度为恒矢量，则其运动轨迹必定为直线。

6. 一质点在 Oxy 平面内运动，其运动方程为 $x=at$，$y=b+ct^2$，式中的 a、b、c 均为常数。当运动质点的运动方向与 x 轴正方向的夹角为 45° 角时，其速率为　[B]

A a　　B $\sqrt{2}a$　　C $2c$　　D $\sqrt{a^2+4c^2}$

7. 一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为　[D]

A $\dfrac{dr}{dt}$　　B $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$　　C $\dfrac{d|\vec{r}|}{dt}$　　D $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

8. 一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\vec{r}=at^2\vec{i}+bt^2\vec{j}$（其中 a、b 为常量），则该质点作　[B]

A 匀速直线运动　　B 变速直线运动

C 抛物线运动　　D 一般曲线运动。

9. 一质点沿 x 轴运动，其加速度为 $a=4t$ (SI)，已知 $t=0$ 时，质点位于 $x_0=10$ m 处，初速度 $v_0=0$. 试求其位置和时间的关系式.

解：由题意知，质点沿 x 轴做一维运动

有 $a=\frac{dv}{dt}=4t$

$dv=4t\,dt$

两边求定积分

$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t 4t\,dt$

$\Rightarrow v=2t^2$

再由 $v=\frac{dx}{dt}$,

$dx=2t^2dt$

两边求定积分：

$\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t 2t^2dt$

$\Rightarrow x=\frac{2}{3}t^3+10$

10. 已知质点的运动方程为 $x=2t$，$y=2-t^2$，求：(1) $t=1$s 到 $t=2$s 这段时间内质点的位移和平均速度；(2) $t=2$s 时质点的速度和加速度。

解：(1) 由题意知，质点在任意时刻 t 的位置矢量为

$\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$

当 $t_1=1$s 时，

$\vec{r}_1=2\vec{i}+\vec{j}$

当 $t_2=2$s 时，

$\vec{r}_2=4\vec{i}-2\vec{j}$

1s 到 2s 这段时间内质点的位移

$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=2\vec{i}-3\vec{j}$

平均速度：

$\overline{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=2\vec{i}-3\vec{j}$

(2) 由速度的定义 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$

则 $\vec{v}=\frac{d[2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}]}{dt}$

$=2\vec{i}-2t\vec{j}$

将 $t=2$s 代入，得质点的速度

$\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}$

由加速度的定义

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$

则 $\vec{a}=\frac{d(2\vec{i}-2t\vec{j})}{dt}=-2\vec{j}$

所以 $t=2$s 时，加速度 $\vec{a}=-2\vec{j}$.

11. 质点沿 x 轴运动，其加速度和位置的关系为 $a=2+6x^2$，a 的单位为 $m\cdot s^{-2}$，x 的单位为 m. 质点在 $x=0$ 处，速度为 $10\,m\cdot s^{-1}$，试求质点在任何坐标处的速度值.

解：由题意知，质点在做一维运动

$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$

所以 $v\frac{dv}{dx}=2+6x^2$

$\Rightarrow v\,dv=(2+6x^2)dx$

两边同时求定积分

$\int_{10}^{v}v\,dv=\int_0^x(2+6x^2)dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2-50=2x+2x^3$

即 $v=2\sqrt{x+x^3+25}$

12.思考题：

请举例说明下列问题：

（1）质点能否具有恒定的速率而速度却是变化的呢？

（2）有没有这样的可能，质点的加速度在变小，而其速度在变大呢？

第二节 圆周运动

1. 一质点做半径为 $R=2.0\ m$ 的圆周运动，其路程为 $s=2t^2$（SI），则质点的速率 $\upsilon=$ ___4t m/s___ ，切向加速度大小 $a_t=$ ___$4m/s^2$___ ，法向加速度大小 $a_n=$ ___$8t^2\ m/s^2$___ ，总加速度矢量 $\vec{a}=$ ___$4\vec{e}_\tau+8t^2\vec{e}_n$___ 。

2. 一个以恒定角加速度转动的圆盘，如果在某一时刻的角速度为$\omega_1=20\pi$rad/s，再转 60 转后角速度为$\omega_2=30\pi$ rad /s ，则角加速度$\beta=$ ___$\frac{25}{12}\pi$___ ,转过上述 60 转所需的时间 $\Delta t=$ ___$\frac{24}{5}$s___ 。

3. 一质点作半径为 R 的圆周运动，其路程：$S=\frac{1}{2}kRt^2$，k 为常数，则切向加速度为 ___$kR\vec{e}_\tau$___ ；加速度的大小为 ___$\sqrt{(kR)^2+(k^2Rt^2)^2}$___ 。

4. 下列说法正确的是　　　　[D]

A　在圆周运动中，加速度的方向一定指向圆心 ；

B　匀速圆率圆周运动的速度和加速度都恒定不变 ；

C　物体作曲线运动，速度的方向一定在运动轨迹的切向方向上，法向分速度恒等于零，因此其法向加速度也一定恒等于零；

D　物体作曲线运动时，必定有加速度，加速度的法向分量一定不等于零。

5. 下列五种运动形式中，$\vec{a}$ 保持不变的运动是　　[D]

A　单摆的运动　　　　B　匀速率圆周运动

C　行星的椭圆轨道运动　D　抛体运动　E　圆锥摆运动

6. 质点沿半径为 R 的圆周按 $s=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}bt^2$ 的规律运动，式中 s 为质点离圆周上某点的弧长，υ_0，b 都是常量，求：(1) t 时刻质点的加速度；(2)　t 为何值时，加速度在数值上等于 b .

解：(1) 质点在任意时刻t的速率为

$$v=\frac{ds}{dt}=v_0-bt$$

则质点的切向加速度大小为

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=-b$$

质点法向加速度大小：

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

质点的加速度

$$\vec{a}=a_\tau\vec{e}_\tau+a_n\vec{e}_n=-b\vec{e}_\tau+\frac{(v_0-bt)^2}{R}\vec{e}_n$$

(2) 加速度的大小

$$|\vec{a}|=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}$$

令 $|\vec{a}|=b$

即 $b=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}$

可求出　$t=\frac{v_0}{b}$

7. 飞轮半径为 0.4 m，自静止启动，其角加速度为 β=0.2 $rad\cdot s^{-2}$，求 t =2s 时边缘上各点的速度、法向加速度、切向加速度和合加速度。

解：飞轮做匀加速转动

$R=0.4m$, $\beta=0.2\ rad/s^2$, $w_0=0$.

由 $w=w_0+\beta t=0.2t$

所以 $v=wR=0.08t$

在 $t=2S$ 时，

$w=0.4\ rad/s$

$\vec{v}=0.16\vec{e}_\tau$

切向加速度

$$\vec{a}_\tau=\frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau=0.08\vec{e}_\tau$$

法向加速度

$$\vec{a}_n=\frac{v^2}{R}\vec{e}_n=0.064\vec{e}_n$$

合加速度为

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n=0.08\vec{e}_\tau+0.064\vec{e}_n$$

8. 以初速度 $\upsilon_0 = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 斜向上抛出一小球，抛出方向与水平面成 60° 的夹角，求：(1) 球轨道最高点的曲率半径 R_1；(2) 落地处的曲率半径 R_2。(提示：利用曲率半径与法向加速度之间的关系)

解：(1) 小球做上抛运动，则将小球任意时刻的速度进行分解，以水平面向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则速率在 x 与 y 方向的速率分别为：

$$v_x = v_0\cos60^\circ$$
$$v_y = v_0\sin60^\circ - gt$$

小球在轨道最高点时，$v_y = 0$

$$v_x = v_0\cos60^\circ = 10\,m/s$$

所以此时合速率为 v_x，切向加速度大小为

$$a_\tau = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

法向加速度大小为

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = g$$

曲率半径 $R_1 = \frac{v_x^2}{a_n} = 10m$

(2) 落地处的法向加速度大小

$$a_n = g\cos60^\circ$$

速率为 $v = v_0 = 20m/s$

曲率半径 $R_2 = \frac{v^2}{a_n} = \frac{400}{10\times0.5} = 80m$

第三节　相对运动

1. 当一列火车以 10 m/s 的速率向东行驶时，若相对于地面竖直下落的雨滴在列车的窗子上形成的雨迹偏离竖直方向 30°，则雨滴相对于地面的速率是 $10\sqrt{3}$ m/s，相对于列车的速率是 20 m/s 。

2. 一船以速度 $\vec{\upsilon}_0$ 在静水湖中匀速沿直线方向航行，一乘客以初速 $\vec{\upsilon}_1$ 在船中竖直向上抛出一石子，则站在岸上的观察者看石子运动的轨迹是 抛物线 ，取抛出点为原点，x 轴沿 $\vec{\upsilon}_0$ 方向，y 轴沿竖直向上方向，石子的轨迹方程是 $y = \frac{v_1}{v_0}x - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ 。

3. 在相对地面静止的坐标系内，A,B 两船都以 2m/s 的速率匀速行驶。A 船沿 Ox 轴正方向行驶，B 船沿 Oy 方向轴正向行驶。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系，则从 A 船上看 B 船，它对 A 船的速度(SI 单位)为　[B]

A $2\vec{i} + 2\vec{j}$　B $-2\vec{i} + 2\vec{j}$　C $-2\vec{i} - 2\vec{j}$　D $2\vec{i} - 2\vec{j}$

4. 思考题： 一半径为 R 的圆筒内盛有水，水面低于圆筒的顶部，当它以角速度 ω 绕竖直轴旋转时，水面呈平面还是抛物面？试简单说明。

质点运动学小结

一、教学要求

掌握位矢、位移、速度、加速度、角速度和角加速度等描述质点运动和运动变化的物理量。能借助于直角坐标系计算质点在平面内运动时的速度、加速度。能计算质点做圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度。

二、内容提要

1.基本物理量

(1).位置矢量(运动方程)

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},$$

速度 $\bar{v}=\dfrac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bar{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bar{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\bar{k}$

加速度 $\bar{a}=\dfrac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\bar{i}+\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\bar{j}+\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\bar{k}$

切向加速度 $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，法向加速度 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$.

(2).圆周运动的角量描述

$\theta=\theta(t)$，　$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，　$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$，

角量与线量的关系

$\Delta s=r\cdot\Delta\theta$，　　$v=\omega r$，

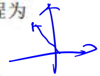
$a_t=r\beta$,　　$a_n=r\omega^2$。

2、相对运动　.理解伽利略相对性原理，理解伽利略坐标、速度变换。　$\bar{v}=\bar{u}+\bar{v}'$

质点运动学综合练习

1. 一质点在 $x=10\ m$ 处，由静止开始沿 Ox 轴正方向运动，它的加速度 $a=6t\ (m\cdot s^{-2})$，经过 5 s 后，它的位置应该位于 $x=$ 13.5 m 处。

2. 在 x 轴上作变加速直线运动的质点，已知其初速度为 v_0，初始位置为 x_0，加速度 $a=Ct^2$（其中 C 为常量），则其速度与时间的关系为 $v=$ $v_0+\frac{1}{3}Ct^3$ ，运动学方程为 $x=$ $x_0+v_0t+\frac{1}{12}Ct^4$ 。

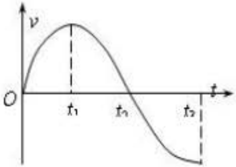


3. 已知质点的运动学方程为 $\bar{r}=(5+2t-\frac{1}{2}t^2)\bar{i}+(4t+\frac{1}{3}t^3)\bar{j}$ (SI)，当 t = 2 s 时，加速度的大小为 $a=$ $\sqrt{17}\ (m/s^2)$；加速度 $\bar{a}$ 与 x 轴正方向间夹角 $\alpha=$ $\pi+\arctan(-4)$

4. 已知质点的运动方程为 $\bar{r}=2t^2\,\bar{i}+\cos\pi t\,\bar{j}$，则其速度 $\bar{v}=$ $4t\vec{i}-\pi\sin\pi t\vec{j}$；加速度 $\bar{a}=$ $4\vec{i}-\pi^2\cos\pi t\,\vec{j}$；当 $t=1$s 时，质点的切向加速度 $a_t=$ 4；法向加速度 $a_n=$ π^2。

5. 质点沿 X 轴作直线运动,其 $v-t$ 图象为一曲线,如图所示，则以下说法正确的是　　[B]

A　$0\sim t_3$ 时间内质点的位移用 $v-t$ 曲线与 t 轴所围面积绝对值之和表示，路程用 $v-t$ 曲线与 t 轴所围面积的代数和表示；

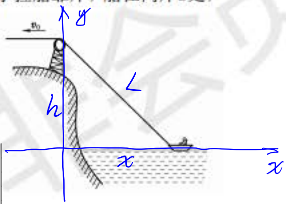


B　$0\sim t_3$ 时间内质点的路程用 $v-t$ 曲线与 t 轴所围面积绝对值之和表示，位移用 $v-t$ 曲线与 t 轴所围面积的代数和表示；

C　$0\sim t_3$ 时间内质点的加速度大于零；

D　t_1 时刻质点的加速度不等于零.

6. 在离水面高h米的岸上，有人用绳子拉船靠岸，船在离岸S处，如题图所示。当人以 v_0 $(m\cdot s^{-1})$ 的速率收绳时，试求船运动的速度和加速度的大小。



解：建立如图所示的直角坐标系

船的位置矢量为 $\vec{r} = x\vec{i}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$

由 $x^2 = L^2 - h^2$

两边对t求导数

$2x\frac{dx}{dt} = 2L\frac{dL}{dt} = 2Lv_0$

所以 $\frac{dx}{dt} = \frac{L}{x}v_0$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{L}{x^2}v_0\frac{dx}{dt} = -\frac{L^2}{x^3}v_0^2$

当 $x = s$ 时

$v = \frac{dx}{dt} = \frac{L}{s}v_0$

$a = -\frac{L^2}{s^3}v_0^2$

7. 已知一质点作直线运动，其加速度为 $a=4+3t\ \ m\cdot s^{-2}$，开始运动，$x=5\ m$，$v=0$，求该质点在 $t=10$s 时的速度和位置.

解：由 $a = \frac{dv}{dt}$，

$dv = a\,dt$

两边积分

$\int_0^v dv = \int_0^t (4+3t)dt$

$v = 4t + \frac{3}{2}t^2$

由 $v = \frac{dx}{dt}$

$dx = v\,dt$

$x - 5 = \int_0^t (4t + \frac{3}{2}t^2)dt = 2t^2 + \frac{1}{2}t^3$

$x = \frac{1}{2}t^3 + 2t^2 + 5$

$t = 10$s 时

$v = 190$ m/s

$x = 705$ m

8. 由楼窗口以水平初速度 $\vec{v}_0$ 射出一发子弹，取枪口为原点，沿 $\vec{v}_0$ 方向为x轴，竖直向下为y轴，并取发射时刻t为0，试求：

(1) 子弹在任一时刻 t 的位置坐标及轨迹方程；

(2) 子弹在 t 时刻的速度，切向加速度和法向加速度.

解：(1) $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

$\vec{r} = v_0 t\,\vec{i} + \frac{1}{2}gt^2\,\vec{j}$

轨迹方程

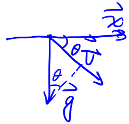
$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$

(2) $\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = gt \end{cases}$

t时刻的速度

$\vec{v} = v_0\vec{i} + gt\vec{j}$

$\vec{a} = g\vec{j}$



$\tan\theta = \frac{gt}{v_0}$

$\sin\theta = \frac{gt}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$

$\cos\theta = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$

切向加速度

$a_\tau = g\sin\theta = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$

$a_n = g\cos\theta = \frac{v_0 g t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$

牛顿定律

1. 下面说法正确的是　　　　[D]

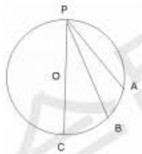
（A）　合力一定大于分力；

（B）　物体速率不变，所以合力为零；

（C）　速度很大的物体，运动状态不易改变；

（D）　质量越大的物体，运动状态越不易改变。

2. 图中 P 是一个圆轨道的竖直直径 PC 上的端点，一质点从 P 由静止开始分别沿不同的弦无摩擦下滑时，则下列有关到达各弦下端所用时间的说法中，正确的是　　　　[D]



(A) 到 A 用时间最短。

(B) 到 B 所用时间最短。

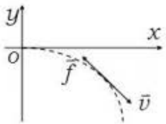
(C) 到 C 用时间最短。

(D) 所用时间都一样。

3. 一质量为 2kg 的质点作半径为 $R = 8.0\text{m}$ 的圆周运动，其路程为 $s = 2t^2 + 1(\text{SI})$，则质点在 $t = 2\text{s}$ 时所受到的合力的大小为 [B]

(A) $4\sqrt{3}\,\text{N}$　　(B) $8\sqrt{5}\,\text{N}$　　(C) $4\sqrt{5}\,\text{N}$　　(D) 16 N

4. 质量为 m 的质点在某高度水平抛出，所受到的阻力为 $\vec{f} = -k\vec{v}$，如图所示，则质点运动的微分方程为　B



(A) $-m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\dfrac{dx}{dt}$　　$-m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mg + k\dfrac{dy}{dt}$

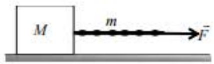
(B) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\dfrac{dx}{dt}$　　$m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg - k\dfrac{dy}{dt}$

(C) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\dfrac{dx}{dt}$　　$m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg + k\dfrac{dy}{dt}$

(D) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = k\dfrac{dx}{dt}$　　$-m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg + k\dfrac{dy}{dt}$

5 设在 x 坐标轴上运动的质量为 m 的质点，仅受到 x 方向的力 F 的作用。如果质点某一类运动的速度 v 与其所在位置 x 的关系为 $v = v_0 + \alpha x$，其中 α 为一常量，则 F 与 x 的关系为 $F=$ $m\alpha(v_0+\alpha x)$。

6. 一物体质量为 M，置于光滑水平地板上．今用一水平力 $\vec{F}$ 通过一质量为 m 的绳拉动物体前进，则物体的加速度 a＝ $\dfrac{F}{m+M}$，绳作用于物体上的力 T＝ $\dfrac{MF}{m+M}$．



7. 质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射入沙土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小与速度成正比，比例系数为 K，忽略子弹的重力，求：

(1) 子弹射入沙土后，速度随时间变化的函数式；

(2) 子弹进入沙土的最大深度．

解：(1) 根据牛顿第二定律

$$-Kv = m\frac{dv}{dt} \quad ①$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{K}{m}dt$$

两边积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{K}{m}\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{K}{m}t$$

$$v = v_0 e^{-\frac{K}{m}t}$$

(2) 将方程①改写成

$$-Kv = m\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{dx}$$

所以

$$dx = -\frac{m}{K}dv$$

$$\Delta x = \int_{v_0}^{0}\left(-\frac{m}{K}\right)dv$$

$$= \frac{m}{K}v_0$$

9.思考题：请简要回答在力学这一章节，大学物理和高中物理的主要区别是什么？（罗列两点）并简单说说你在学习过程中遇到的困难。

8、已知质量为 m 的小球在水中竖直下降，水对小球的浮力为 F，水对小球的粘滞阻力 $F_R=-kv$，已知 $t=0$ 时小球的速度为 v_0，求小球在水中竖直下降的速度？

解：建立竖直向下为正方向的坐标系

根据牛顿第二定律：

$$ma = mg - kv - F$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv - F$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{F}{m} - \frac{k}{m}v$$

$$\frac{dv}{\frac{F-mg}{k}+v} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\frac{F-mg}{k}+v} = -\frac{k}{m}t$$

$$\ln\frac{\frac{F-mg}{k}+v}{\frac{F-mg}{k}+v_0} = -\frac{k}{m}t$$

$$v = \frac{mg-F}{k} + \left(\frac{F-mg}{k}+v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t}$$

动量守恒定律和能量守恒定律

第一节 动量定理 动量守恒定律

1. 以下说法正确的是　　[B]

A 大力的冲量一定比小力的冲量大；

B 小力的冲量有可能比大力的冲量大；

C 速度大的物体动量一定大；

D 质量大的物体动量一定大.

2. 作匀速圆周运动的物体运动一周后回到原处,这一周期内物体

[C]

A 动量守恒,合外力为零.

B 动量守恒,合外力不为零.

C 动量变化为零,合外力不为零，合外力的冲量为零.

D 动量变化为零,合外力为零.

3. 对于力的冲量的说法，正确的是　　[B]

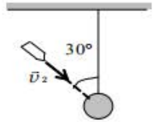
A 力越大，力的冲量就越大

B 作用在物体上的力大，力的冲量不一定大

C F_1 与其作用时间 t_1 的乘积 F_1t_1 等于 F_2 与其作用时间 t_2 的乘积 F_2t_2，则这两个冲量相同

D 静置于水平地面的物体受到水平推力 F 的作用，经过时间 t 仍处于静止，则此推力的冲量为零

4. 质量为 20 g 的子弹，以 400 m/s 的速率沿图示方向射入一原来静止的质量为 980 g 的摆球中，摆线长度不可伸缩．子弹射入后开始与摆球一起运动的速率为



[B]

A　2 m/s.　　　B　4 m/s.

C　7 m/s .　　　D　8 m/s

5. 设作用在质量为 1 kg 的物体上的力 $F=6t+3$（SI）．如果物体在这一力的作用下，由静止开始沿直线运动，在 0 到 2.0 s 的时间间隔内，这个力作用在物体上的冲量大小 I = 18 N·s.

6. 一物体质量 $M=2$ kg，在合外力 $F=(3+2t)\vec{i}$ (SI)的作用下，从静止开始运动，式中 $\vec{i}$ 为方向一定的单位矢量，则当 $t=1$ s 时物体的速度 $\vec{v}_1$ = 2 m/s.

7. 一物体质量为 10 kg，受到方向不变的力 $F=30+40t$ (SI)作用，在开始的两秒内，此力冲量的大小等于 140 N·s；若物体的初速度大小为 10 m/s，方向与力 $\vec{F}$ 的方向相同，则在 2s 末物体速度的大小等于 24 m/s.

8. 一质量为 1 kg 的物体，置于水平地面上，物体与地面之间的静摩擦系数 $\mu_0=0.20$，滑动摩擦系数 $\mu=0.16$，现对物体施一水平拉力 $F=t+0.96$(SI)，则 2 秒末物体的速度大小

v= 0.892 m/s.

9. 一小船质量为 100kg，船头到船尾共长 3.6m。现有一质量为 50kg 的人从船头走到船尾时，船将移动多少距离？假定水的阻力不计.

解：假设在人运动过程中人的速度为 $v_人$，船的速度为 $v_船$.

$$\Delta x_人 = \int_0^t v_人 dt \quad ①$$

$$\Delta x_船 = \int_0^t v_船 dt \quad ②$$

因人相对船的位移是 3.6m.

即 $\Delta x_人 - \Delta x_船 = 3.6m$ ③

由动量守恒定律：

$$m_人 v_人 + m_船 v_船 = 0$$

$$\frac{v_船}{v_人} = -\frac{m_人}{m_船} = -\frac{1}{2} \quad ④$$

结合①②④得

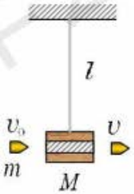
$$\Delta x_人 = -2\Delta x_船 \quad ⑤$$

联立③⑤解得

$$\Delta x_人 = 2.4m$$

$$\Delta x_船 = -1.2m.$$

10. 质量为 M=1.5 kg 的物体，用一根长为 l=1.25 m 的细绳悬挂在天花板上．今有一质量为 m=10 g 的子弹以 v_0=500 m/s 的水平速度射穿物体，刚穿出物体时子弹的速度大小 v=30 m/s，设穿透时间极短．求：(1) 子弹刚穿出时绳中张力的大小；(2) 子弹在穿透过程中所受的冲量．



解：(1) 在子弹射穿物块的过程，动量守恒：

初总动量：mv_0

末总动量：$mv + MV$

$$mv_0 = mv + MV$$

$$\Rightarrow V = \frac{m}{M}(v_0 - v)$$

$$T - Mg = M\frac{V^2}{l}$$

$$T = Mg + M\frac{V^2}{l}$$

$$= 26.78N$$

(2) 子弹所受的冲量

$$I = \Delta p_{子弹}$$

$$= m\Delta v$$

$$= 0.01 \times 470 \ N \cdot S$$

$$= 4.7 \ N \cdot S$$

11. 静水中停着两条质量均为 M 的小船，当第一条船中的一个质量为 m 的人以水平速度 $\vec{v}$（相对于地面）跳上第二条船后，两船运动的速度各多大？（忽略水对船的阻力）.

解：分成两个阶段：

1. 从第一条船上跳出：

$$Mv_1 + mv = 0$$

$$v_1 = -\frac{m}{M}v$$

2. 跳上第二条船：

$$mv = (m+M)v_2$$

$$v_2 = \frac{m}{m+M}v$$

12.思考题

一人在帆船上用电动鼓风机对帆鼓风，企图使帆船前进，但他发觉，船非但不前进，反而缓慢后退，这是为什么？

第二节　功 动能定理

1. 对功的概念有以下几种说法：

(1) 保守力作正功时，系统内相应的势能~~增加~~

(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零 ✓

(3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反，所以两者所作功的代数和必为~~零~~　　　　[C]

在上述说法中：

(A) (1)、(2)是正确的　　(B) (2)、(3)是正确的

(C) 只有(2)是正确的　　(D) 只有(3)是正确的

2. 有一劲度系数为 k 的轻弹簧，原长为 l_0，将它吊在天花板上。当它下端挂一托盘平衡时，其长度变为 l_1。然后在托盘中放一重物，弹簧长度变为 l_2，则由 l_1 伸长至 l_2 的过程中，弹性力所作的功为　　　　[C]

(A) $-\int_{l_1}^{l_2} kx\,\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{l_1}^{l_2} kx\,\mathrm{d}x$

(C) $-\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0} kx\,\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0} kx\mathrm{d}x$

$\int_0^1 kx\,dx = \frac{1}{2}k$

$\int_1^x kx\,dx$

$\frac{1}{2}k(x^2-1)$

3. 用铁锤把质量很小的钉子敲入木板，设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比。在铁锤敲打第一次时，能把钉子敲入 1.00cm。如果铁锤第二次敲打的速度与第一次完全相同，那么第二次敲入深度为　　　　[A]

A　0.41cm；　B　0.50cm；　C　0.73cm；　D　1.00cm。

4. 将一个物体提高 10m，下列哪一种情况下提升力所作的功最小?　　　　[D]

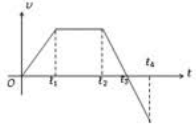
A 以 5m/s 的速度匀速提升；

B 以 10 m/s 的速度匀速提升；

C 将物体由静止开始匀加速提升 10m，速度增加到 5m/s；

D 物体以 10m/s 的初速度匀减速上升 10m，速度减小到 5m/s。

5. 一个作直线运动的物体，其速度 v 与时间 t 的关系曲线如图所示。设时刻 t_1 至 t_2 间外力作功为 W_1；时刻 t_2 至 t_3 间外力作功为 W_2；时刻 t_3 至 t_4 间外力作功为 W_3，则　　　　[C]



(A)　$W_1>0$，$W_2<0$，$W_3<0$

(B)　$W_1>0$，$W_2<0$，$W_3>0$

(C)　$W_1=0$，$W_2<0$，$W_3>0$

(D)　$W_1=0$，$W_2<0$，$W_3<0$

6. 某质点在力 $\vec{F}=(4+5x)\vec{i}$ (SI)的作用下沿 x 轴作直线运动，在从 x＝0 移动到 x＝ 10m 的过程中，力 $\vec{F}$ 所做的功为 <u>290J</u>。

$\int_0^{10}(4+5x)dx = (4x+\frac{5}{2}x^2)\Big|_0^{10} = 40+250 = 290$

7. 一质点在二恒力共同作用下，位移为 $\Delta\vec{r}=3\vec{i}+8\vec{j}$ (SI)；在此过程中，动能增量为 24J，已知其中一恒力 $\vec{F}_1=12\vec{i}-3\vec{j}$ (SI)，则另一恒力所作的功为 <u>12J</u>。

$\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = 24$

$\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = 36-24 = 12$

8. 人从 10m 深的井中匀速提水，桶离开水面时装有水 10kg。若每升高 1m 要漏掉 0.2kg 的水，则把这桶水从水面提高到井口的过程中，人力所作的功为 <u>900J</u>。

$m = 10-0.2x$

9. 一根特殊弹簧，在伸长 x 米时，其弹力为 $(4x+6x^2)$ 牛顿。

（1）试求把弹簧从 $x=0.50$ 米拉长到 $x=1.00$ 米时，外力克服弹簧力所作的总功。（2）将弹簧的一端固定，在其另一端拴一质量为 2 千克的静止物体，试求弹簧从 $x=1.00$ 米回到 $x=0.50$ 米时物体的速率。(不计重力)

解：(1) $W=-\int_{0.5}^{1}(4x+6x^2)dx$

$=-(2x^2+2x^3)\Big|_{x=0.5}^{x=1}$

$=-(2+2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})$

$=-3.25$ (J)

(2) 根据动能定理：

$\Delta E_K=W$

$\frac{1}{2}mv^2=3.25$

$v=\sqrt{3.25}$ (m/s)

≈ 1.8 (m/s)

10． 把一质量为 m＝0.4kg 的物体，以初速度 v_0＝20m/s 竖直向上抛出，测得上升的最大高度 H＝16m，求空气对它的阻力 f（设为恒力）。

解：由动能定理：

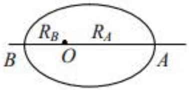
$-f\cdot H-mgH=0-\frac{1}{2}mv_0^2$

$f=\frac{1}{H}\frac{1}{2}mv_0^2-mg$

$=5-4$

$=1$ (N)

11. 人造地球卫星质量为 m，绕质量为 M 的地球做椭圆轨道运动，如图示。近地点 B 到地球的距离为 R_B，远地点 A 到地球的距离为 R_A.求（1）卫星在近地点与远地点动能之比；（2）从近地点到远地点引力所作的功。



解：(1) 因 A, B 分别是近日点、与远日点，所以 A, B 位于椭圆的长轴的端点上，A, B 两点处的曲率半径相等，因此，卫星处于 A 时

$F_A=G\frac{mM}{R_A^2}=m\frac{v_A^2}{\rho}$ ①

卫星处于 B 时：

$F_B=G\frac{mM}{R_B^2}=m\frac{v_B^2}{\rho}$ ②

①② 两式两边相除得

$\frac{v_A^2}{v_B^2}=\frac{R_B^2}{R_A^2}$

$\Rightarrow \frac{E_{kA}}{E_{kB}}=\frac{R_B^2}{R_A^2}$

(2) 万有引力是保守力，

$W=-\Delta E_p$

$=-\left(-\frac{GmM}{R_A}-\left(-\frac{GmM}{R_B}\right)\right)$

$=GmM\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$

第三节　功能原理 能量守恒定律 碰撞

1. 在两个质点组成的系统中，若质点之间只有万有引力作用，且此系统所受外力的矢量和为零，则此系统　　[D]

(A)　动量与机械能一定都守恒.

(B)　动量与机械能一定都不守恒.

(C)　动量不一定守恒，机械能一定守恒.

(D)　动量一定守恒，机械能不一定守恒.

2. 关于机械能守恒条件和动量守恒条件有以下几种说法，其中正确的是　　[C]

(A) 不受外力作用的系统，其动量和机械能必然同时守恒.

(B) 所受合外力为零，内力都是保守力的系统，其机械能必然守恒.

(C) 不受外力，而内力都是保守力的系统，其动量和机械能必然同时守恒.

(D)外力对一个系统做的功为零，则该系统的机械能和动量必然同时守恒

3. 两个质量相等、速率也相等的粘土球相向碰撞后粘在一起而停止运动. 在此过程中，由这两个粘土球组成的系统，

(A)　动量守恒，动能也守恒.　　[B]

(B)　动量守恒，动能不守恒.

(C)　动量不守恒，动能守恒.

(D)　动量不守恒，动能也不守恒.

4. 如图所示，质量分别为 m1 和 m2 的物体 A 和 B，置于光滑桌面上，A 和 B 之间连有一轻弹簧. 另有质量为 m1 和 m2 的物体 C 和 D 分别置于物体 A 与 B 之上，且物体 A 和 C、B 和 D 之间的摩擦系数均不为零. 首先用外力沿水平方向相向推压 A 和 B，使弹簧被压缩. 然后撤掉外力，则在 A 和 B 弹开的过程中，对 A、B、C、D 弹簧组成的系统

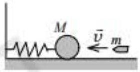
(A)　动量守恒，机械能守恒.

(B)　动量不守恒，机械能守恒.

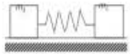
(C)　动量不守恒，机械能不守恒.

(D)　动量守恒，机械能不一定守恒.　　[D]

（第 4 题）



（第 5 题）



（第 6 题）

5. 一质量为 M 的弹簧振子，水平放置且静止在平衡位置，如图所示. 一质量为 m 的子弹以水平速度 $\vec{v}$ 射入振子中，并随之一起运动. 如果水平面光滑，此后弹簧的最大势能为　[B]

(A) $\frac{1}{2}mv^2$；　　(B) $\frac{m^2v^2}{2(M+m)}$；

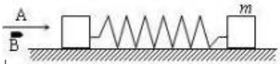
(C) $(M+m)\frac{m^2}{2M^2}v^2$；　　(D) $\frac{m^2}{2M}v^2$。

6. 如图，两木块质量为 m1 和 m2，由一轻弹簧连接，放在光滑水平桌面上，先使两木块靠近而将弹簧压紧，然后由静止释放. 若在弹簧伸长到原长时，m1 的速率为 v_1，则弹簧原来在压缩状态时所具有的势能是　　[D]

(A)　$\frac{1}{2}m_1v_1^2$.　　(B)　$\frac{1}{2}m_2\frac{m_1+m_2}{m_1}v_1^2$.

(C)　$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_1^2$　　(D)　$\frac{1}{2}m_1\frac{m_1+m_2}{m_2}v_1^2$.

7. 如图所示，一轻质弹簧劲度系数为 k，两端各固定一质量均为 M 的物块 A 和 B，放在水平光滑桌面上静止。今有一质量为 m 的子弹沿弹簧的轴线方向以速度v_0射入一物块而不复出，求此后弹簧的最大压缩长度。



解：将整个运动过程分为两个阶段

1、子弹射入物块

2、子弹进入物块后使弹簧压缩.

第1阶段

$$m v_0 = (m+M) v$$

$$v = \frac{m}{m+M} v_0$$

第2阶段

从开始压缩到压缩到最大

$$(m+M)v = (m+2M)v'$$

$$v' = \frac{m}{m+2M} v_0$$

因第二阶段机械能守恒.

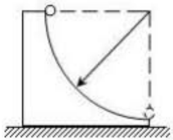
$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}(m+2M)v'^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

$$\frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m+2M)} + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{k} m^2 v_0^2 \left(\frac{1}{m+M} - \frac{1}{m+2M}\right)}$$

$$= m v_0 \sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{m+M} - \frac{1}{m+2M}\right)}$$

9. 一质量为 m 的小球，由顶端沿质量为 M 的圆弧形木槽自静止下滑，设圆弧形槽的半径为 R（如图所示）。忽略所有摩擦，求（1）小球刚离开圆弧形槽时，小球和圆弧形槽的速度各是多少？（2）小球滑到 B 点时对木槽的压力



解：(1) 对小球从槽顶到槽底的过程.

水平方向动量守恒：

$$0 = mv + MV \quad ①$$

这个过程机械能守恒：

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad ②$$

联立①②可得

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{m^2v^2}{2M}$$

$$v = \sqrt{2gR\frac{M}{m+M}}$$

$$V = -\frac{m}{M}\sqrt{2gR\frac{M}{m+M}}$$

(2) 以弧形槽为参照系更方便

弧形槽是非惯性系，小球在此参照系中受到惯性力

$$F_{惯} = -m a_M.$$

小球运动到槽底端时

建立以竖直向上为 y 轴正方向，水平向右为 x 轴正方向的直角坐标系

$$\vec{F}_{合}' = (N - mg)\vec{e}_y = m\vec{a}' + m\vec{a}_{惯}$$

带 ' 的表示非惯性系的物理量.

$$\vec{a}' = \frac{(v-V)^2}{R}$$

$\vec{a}_{惯}$ 是水平方向.

所以 $N - mg = m\frac{(v-V)^2}{R}$

$$N = mg + 2mg\frac{m+M}{M}$$

$$= mg\frac{2m+3M}{M}$$

10. 思考题

有两个同样的物体处在同一位置，其中一个水平抛出，另一个沿斜面无摩擦地自由滑下，问哪个物体先到达地面？到达地面时两者的速率是否相等？

动力学内容小结

一、教学要求

1.掌握牛顿三定律及其适用条件。能用微积分方法求解一维变力作用下简单的质点动力学问题。

3.掌握功的概念，能计算直线运动情况下变力的功。理解保守力作功的特点及势能的概念，会计算重力、弹性力和万有引力势能。

2.掌握质点的动能定理和动量定理，通过质点在平面内的运动情况理解角动量（动量矩）和角动量守恒定律，并能用它们分析、解决质点在平面内运动时的简单力学问题。掌握机械能守恒定律、动量守恒定律，掌握运用守恒定律分析问题的思想和方法，能分析简单系统在平面内运动的力学问题。

二、内容提要

1、牛顿三定律(略)；

惯性系(略)；非惯性系(略)；

惯性力:平动加速参照系 $\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}$

($\boldsymbol{a}$ 为非惯性系相对惯性系的加速度).

匀速转动参照系的惯性离心力 $\boldsymbol{F}_{惯}=m\omega^2\boldsymbol{r}$

2、动量 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$，

冲量 $\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$，

质点及质点系的动量定理 $\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1$，

动量守恒定律：

(1) $\boldsymbol{F}_{外}=0$， $\boldsymbol{p}$=恒量，

(2) $(F_{外})_{某方向}=0$，$p_{某方向}$=恒量，

(3) $F_{外}<<f_{内}$，$\boldsymbol{p}\approx$恒量

$(F_{外})_{某方向}<<(f_{内})_{某方向}$，$p_{某方向}\approx$恒量

3、功 $A=\int_A^B\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_A^B F\mathrm{d}l\cos\alpha$

$$=\int_A^B F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

功率 $P=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$，

动能定理

$$A=\int_A^B\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=E_{kB}-E_{kA}=mv_B^2/2-mv_A^2/2$$

保守力 $E_p=\oint\boldsymbol{F}_{保}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，

势能 $E_p=\int_{场点}^{势能零点}\boldsymbol{F}_{保}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，

重力势能(以坐标原点为势能零点) $E_p=mgy$

引力势能(以无限远为势能零点) $E_p=-GMm/r$

弹性势能(以无伸长点为势能零点)$E_p=kx^2/2$

势能公式

$$A_{保}=\int_A^B\boldsymbol{F}_{保}\cdot d\boldsymbol{l}=E_{p1}-E_{p2}=-\Delta E_p；$$

功能原理 $A_{外}+A_{非保内}=E_2-E_1$

$$=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})；$$

机械能守恒

条件 $A_{外}=0$，$A_{非保内}=0$，

结论 $E=E_k+E_p$=恒量。

综合练习

1. 如图所示的装置中，木块 B 与水平面的接触是光滑的，子弹 A 沿水平方向射入木块后留在木块内，将弹簧压缩到最短。现将子弹、木块和弹簧合在一起作为研究对象（系统），则此系统在子

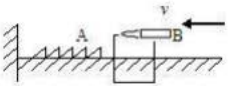
弹开始射入到弹簧压缩到最短的整个过程中　[D]

A　动量守恒，机械能守恒 v

B　动量不守恒，机械能守恒

C　动量守恒，机械能不守恒

D　动量不守恒，机械能不守恒



2. 对功的概念有以下几种说法：

(1) 保守力作正功时系统内相应的势能~~增加~~.

(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零.

(3) 作用力与反作用力大小相等、方向相反，所以两者所作的功的代数合必~~为~~零. 位移可能不相等

在上述说法中：　[C]

A　(1) 、 (2) 是正确的.

B　(2) 、 (3) 是正确的.

C　只有 (2) 是正确的.

D　只有 (3) 是正确的.

3. 物体 A B 质量相等，分别由静止开始沿高度相同，倾角不同的光滑固定斜面下滑，则物体滑到斜面低端时　[B]

A 动量相同 方向

B 动能相同

C 速度相同 方向

D 动量在水平方向的分量相同 ×

4. 在系统不受外力作用的非弹性碰撞过程中　[C]

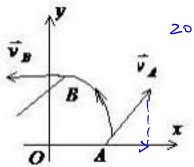
A 动能和动量都守恒；　B 动能和动量都不守恒；

C 动能不守恒、动量守恒；D 动能守恒、动量不守恒。

6. 质量 m=2kg 的质点在力 $\vec{F}=12t\vec{i}$ (SI) 的作用下，从静止出发沿 x 轴正向作直线运动，求前三秒内该力所作的功 ___729 J___ 。

7. 一质点的运动轨迹如图所示．已知质点的质量为 20 g，在 A、B 二位置处的速率都为 20 m/s，$\vec{v}_A$ 与 x 轴成 45°角，$\vec{v}_B$ 垂直于 y 轴，求质点由 A 点到 B 点这段时间内，作用在质点上外力的总冲量 ___$-0.4(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\vec{i}-0.2\sqrt{2}\vec{j}$ (N·s)___

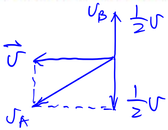
20×20 :



8. 一运动员(m=60kg)作立定跳远在平地上可跳 5m, 今让其站在一小车(M=140kg)上以与地面完全相同的姿势作立定向地下跳远，忽略小车的高度，则他可跳远 ___3.5___ m.

$5\times\frac{140}{60+140}$ m

9. 光滑水平面上有两个质量相同的小球 A 和 B．A 球静止，B 球以速度 $\vec{v}$ 和 A 球发生碰撞，碰撞后 B 球速度的大小为 $\frac{1}{2}v$，方向与 $\vec{v}$ 垂直，则碰后 A 球与 $\vec{v}$ 夹角为 ___$\arctan\frac{1}{2}$___。



刚体的转动

第一节　刚体定轴转动 转动定律

1. 有两个力作用在一个有固定转轴的刚体上

(a)这两个力都平行于轴作用时，它们对轴的合力矩一定是零

(b)这两个力都垂直于轴作用时，它们对轴的合力矩可能是零

(c)当这两个力的合力为零时，它们对轴的合力矩也一定是零

(d)当这两个力对轴的合力矩为零时，它们的合力也一定是零

对上述说法，下列判断正确的是　　　　[B]

A 只有(a)是正确的　　　　B 只有(a)、(b)正确

C 只有(a)、(b)、(c)正确　　　　D 都正确

2. 有两个半径相同，质量相等的细圆环 A 和 B。A 环的质量分布均匀，B 环的质量分布不均匀。它们对通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B，则　　　　[C]

A　$J_A > J_B$　　　　B　$J_A < J_B$

C　$J_A = J_B$　　　　D 不能确定 J_A、J_B 哪个大

3. 均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图所示。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的

[A]

A 角速度从小到大，角加速度从大到小

B 角速度从小到大，角加速度从小到大

C 角速度从大到小，角加速度从大到小

D 角速度从大到小，角加速度从小到大

4. 下列说法错误的是　　　　[C]

A 角速度大的物体，受的合外力矩不一定大；

B 有角加速度的物体，所受的合外力矩不可能为零；

C 有角加速度的物体，所受合外力一定不为零；

D 作定轴（轴过质心）转动的物体，不论角加速度多大，所受合外力一定为零。

5. 一个以恒定角加速度转动的圆盘，如果在某一时刻的角速度为 ω_1，再转 10 转后的角速度为 ω_2，则角加速度 $\alpha =$ $\underline{\frac{1}{40\pi}(\omega_2^2-\omega_1^2)}$，转过上述 10 转所需的时间 $\Delta t =$ $\underline{\frac{40\pi}{\omega_1+\omega_2}}$。

$\omega_2-\omega_1=\alpha t$

$20\pi = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$

$40\pi\alpha = \omega_2^2-\omega_1^2$

6. 一电唱机的转盘以 n 的转速匀速转动，则与转轴相距 r 的转盘上的一点 P 的线速度 $v =$ $\underline{nr}$，法向加速度 $a_n =$ $\underline{n^2 r}$。在电唱机断电后，转盘在恒定的阻力矩作用下减速，并在Δt 内停止转动，则转盘在停止转动前的角加速度 $\alpha =$ $\underline{\frac{n}{\Delta t}}$，转过的圈数 $N =$ $\underline{\frac{1}{2}n\Delta t}$。

$\omega = n - \frac{n}{\Delta t}t$

$\Delta\theta = nt - \frac{1}{2}\frac{n}{\Delta t}t^2 \Rightarrow n\Delta t - \frac{1}{2}n\Delta t = \frac{1}{2}n\Delta t$

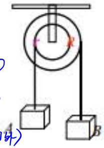
7. 一转动惯量为 J 的圆盘绕一固定轴转动，起始角速度为 ω_0，设它所受的阻力矩与转动角速度成正比，即 $M = -k\omega$（k 为正的常数），则它的角速度从 ω_0 降至一半所需的时间 $t =$ $\underline{\frac{J}{k}\ln 2}$。

$M = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt} = -k\omega$

$\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}}\frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t -\frac{k}{J}dt$

$-\ln 2 = -\frac{k}{J}t \Rightarrow t = \frac{J}{k}\ln 2$

8. 如图：R 和 r 分别为定滑轮上两个圆轮所对应的半径，定滑轮两端分别悬挂质量都是 m 的物块 A 和 B，已知滑轮的转动惯量为 J，求 A、B 两物体的加速度及滑轮的角加速度。



分析：定滑轮在A,B两物体作用下做定轴转动.

竖直向上为 y 轴正方向

假如 A 的加速度为 a_A，则拉 A 的绳上拉力为 $T_A = ma_A + mg$ ①

类似地，B的加速度为 a_B，拉B的绳上拉力为 $T_B = ma_B + mg$ ②

这两个力会对滑轮有力矩.（以逆时针方向为正方向，即垂直纸面向外）

$$M = T_A r_A - T_B r_B = T_A r - T_B R$$

因此滑轮的角加速度满足 $M = J\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M}{J}$

而 r 与 R 处的加速度 $a_r = -\alpha \cdot r = -\frac{M}{J} r$ ③

$$a_R = \alpha \cdot R = \frac{M}{J} R \quad ④$$

r处与A相连

$$\begin{cases} a_A = a_r = -\frac{M}{J} r = -\frac{T_A r - T_B R}{J} r & ⑤ \\ a_B = a_R = \frac{M}{J} R = \frac{T_A r - T_B R}{J} R & ⑥ \end{cases}$$

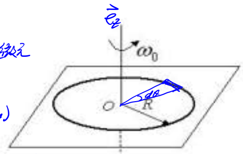
将方程①②⑤⑥联立，4个方程，4个未知量 T_A, T_B, a_A, a_B，必定可解.

$$a_A = \frac{mgr(R-r)}{J+m(r^2+R^2)}$$

$$a_B = -\frac{mgR(R-r)}{J+m(r^2+R^2)}$$

代入③④得：$\alpha = -\frac{mg(R-r)}{J+m(r^2+R^2)}$

9. 如图所示，一质量为 m，半径为 R 的均匀圆环平放在桌面上，圆环与桌面间的动摩擦因数为 μ，在 t=0 时，圆环绕通过圆心并且垂直桌面的转轴以角速度 ω_0 旋转，求(1)圆环转动过程中摩擦力对转轴的力矩；(2)停止转动所需时间；（3）将圆环换成半径为 R 的均匀圆板，则圆板转动过程中摩擦力对转轴的力矩。



解(1) 圆环的转动惯量为 $J = mR^2$.

圆环所受摩擦力,各处的方向不同.因此需要通过微元来考虑.对于 $d\theta$ 角度对应的圆弧

$$dm = \frac{m}{2\pi} d\theta$$

$$\vec{df} = \mu\, dm\, g(-\vec{e}_\theta) = \mu mg \cdot \frac{d\theta}{2\pi}(-\vec{e}_\theta)$$

阻力的力矩 $\vec{dM} = (R\vec{e}_r) \times \vec{df}$

$$= -\mu mgR \frac{d\theta}{2\pi} \vec{e}_z$$

$$M = \int_0^{2\pi} dM = -\mu mgR\, \vec{e}_z$$

(2) 根据 $\vec{M} = J\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = -\frac{\mu g}{R} \vec{e}_z$$

$$d\omega = \vec{\alpha}\, dt$$

$$\omega - \omega_0 = -\frac{\mu g}{R} t$$

当 $\omega = 0$ 时 $t = \frac{\omega_0 R}{\mu g}$

(3) 若换成圆板，将圆板分成许多 dr 宽的圆环

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r\, dr$$

dm圆环的阻力矩是 $dM = -\mu\, dm\, g r\, \vec{e}_z = -\mu\left(\frac{m}{\pi R^2} 2\pi r\, dr\right) g r\, \vec{e}_z$

$$M = \int_0^R -\mu \frac{m}{\pi R^2} g\, 2\pi r^2 dr\, \vec{e}_z = -\frac{\mu mg}{\pi R^2} \cdot \frac{2\pi}{3} R^3\, \vec{e}_z = -\frac{2}{3}\mu mgR\, \vec{e}_z$$

11. 思考题

如果一个刚体所受合外力为零，其合外力矩是否也一定为零？如果刚体所受合外力矩为零，其合外力是否也一定为零？

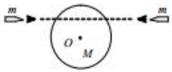
第二节　角动量 角动量守恒

1. 人造地球卫星绕地球作椭圆轨道运动，卫星近地点和远地点分别为 A 和 B。用 L 和 E_k 分别表示卫星对地心的角动量和动能，则 角动量守恒，　　　　[C]

A $L_A > L_B, E_{kA} > E_{kB}$　　B $L_A = L_B, E_{kA} < E_{kB}$

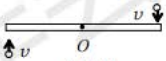
C $L_A = L_B, E_{kA} > E_{kB}$　　D $L_A < L_B, E_{kA} < E_{kB}$

2. 一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴 O 转动，如图射来两个质量相同，速度大小相同，方向相反并在一条直线上的子弹，子弹射入圆盘并且留在盘内，则子弹射入后的瞬间，圆盘的角速度 ω 角动量不变，转动惯量增加　[C]



A 增大　B 不变　C 减小　D 不能确定

3. 光滑的水平桌面上，有一长为 $2L$、质量为 m 的匀质细杆，可绕过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴 O 自由转动，其转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$，起初杆静止。桌面上有两个质量均为 m 的小球，各自在垂直于杆的方向上，正对着杆的一端，以相同速率 v 相向运动，如图所示。当两小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后，就与杆粘在一起转动，则这一系统碰撞后的转动角速度应为　　[C]



俯视图

A $\dfrac{2v}{3L}$　B $\dfrac{4v}{5L}$　C $\dfrac{6v}{7L}$　D $\dfrac{8v}{9L}$　E $\dfrac{12v}{7L}$

角动量 $2mvL$，转动惯量 $2mL^2+\frac{1}{3}mL^2=\frac{7}{3}mL^2$

4. 人造地球卫星，绕地球作椭圆轨道运动，地球在椭圆的一个焦点上，则卫星的　　[C]

A 动量不守恒，动能守恒

B 动量守恒，动能不守恒

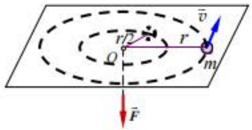
C 对地心的角动量守恒，动能不守恒

D 对地心的角动量不守恒，动能守恒

5. 花样滑冰运动员绕过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0，角速度为 ω_0，然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$，这时她转动的角速度变为　　[C]

A $\dfrac{1}{3}\omega_0$　B $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\omega_0$　C $3\,\omega_0$　D $\sqrt{3}\,\omega_0$

6. 轻绳一端系着质量为 m 的质点，另一端穿过光滑水平桌面上的小孔 O 用力拉着，质点原来以等速率 v 作半径为 r 的圆周运动，问当拉动绳子向正下方移动到半径为 $r/2$ 时，质点的角速度=$\underline{\ \dfrac{2v}{r}\ }$。



7. 质量为 75 kg 的人站在半径为 2 m 的水平转台边缘，转台的固定转轴竖直通过台心且无摩擦。转台绕竖直轴的转动惯量为 3000 $kg\cdot m^2$。开始时整个系统静止，现人以相对于地面为 1 $m\cdot s^{-1}$ 的速率沿转台边缘行走，求：人沿转台边缘行走一周，回到他在转台上的初始位置所用的时间。

解：以转台的转轴为轴，人的转动惯量 $J_人 = mL^2 = 300\,kg\cdot m^2$.

人从静止到 $v = 1m/s$，整个系统角动量守恒.

$$0 = J_人 w_人 + J_台 w_台$$

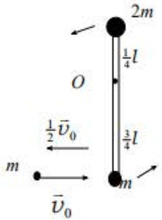
$$w_人 = \frac{v}{L} = \frac{1m/s}{2m} = 0.5\ rad/s$$

$$w_台 = -\frac{J_人 w_人}{J_台} = -\frac{300\times 0.5}{3000}\ rad/s = 0.05\ rad/s$$

人相对于转台的角速度为 $w = 0.55\ rad/s$

因此转动 2π 角度的时间 $t = \frac{2\pi}{w} = \frac{40\pi}{11}\ s$

8. 如图所示，长为 l 的轻杆，两端各固定质量分别为 m 和 $2m$ 的小球，杆可绕水平光滑固定轴 O 在竖直面内转动，转轴 O 距两端分别为 $\frac{1}{4}l$ 和 $\frac{3}{4}l$，轻杆原来静止在竖直位置。今有一质量为 m 的小球，以水平速度 $\vec{v}_0$ 与杆下端小球 m 作对心碰撞，碰后以 $\frac{1}{2}\vec{v}_0$ 的速度返回，试求碰撞后轻杆所获得的角速度。



解：首先系统的转动惯量 $J = 2m(\frac{1}{4}l)^2 + m(\frac{3}{4}l)^2 = \frac{11}{16}ml^2$

将小球与杆整体作为一个系统，角动量守恒

$$mv_0\frac{3}{4}l = -m\frac{v_0}{2}\frac{3}{4}l + Jw$$

$$w = \frac{\frac{9}{8}mv_0 l}{J} = \frac{\frac{9}{8}mv_0 l}{\frac{11}{16}ml^2} = \frac{18}{11}\frac{v_0}{l}$$

第三节　力矩做功 刚体定轴转动的动能定理

1. 一水平圆盘可绕通过其中心的固定竖直轴转动，盘上站着一个人. 把人和圆盘取作系统，当此人在盘上随意走动时，若忽略轴的摩擦，此系统　　[C]

A　动量守恒

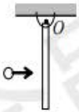
B　机械能守恒

C　对转轴的角动量守恒 ✓

D　动量、机械能和角动量都守恒

E　动量、机械能和角动量都不守恒

2. 如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴 O 旋转，初始状态为静止悬挂．现有一个小球自左方水平打击细杆．设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中对细杆与小球这一系统　　[C]



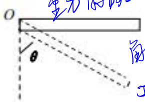
A　只有机械能守恒

B　只有动量守恒

C　只有对转轴 O 的角动量守恒

D　机械能、动量和角动量均守恒

3. 一长为 l 的匀质细杆，一端固定，可绕水平轴在竖直平面内转动，现将杆拉至水平，然后轻轻释放，让其自由转下，忽略摩擦等影响，当杆转至与竖直线成 θ 角时，其角速度为　　[B]



重力的力矩 $mg\frac{l}{2}\sin\theta$

角加速度

$J=\frac{1}{3}ml^2$

$\alpha=\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta$

$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$

$\frac{1}{2}\omega^2=\int\alpha d\theta$

$-\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta}$

$\omega^2=3\frac{g}{l}\cos\theta$

A $\left(\frac{3g}{l}\sin\theta\right)^{\frac{1}{2}}$　　B $\left(\frac{3g}{l}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$

C $\left(\frac{g}{l}\sin\theta\right)^{\frac{1}{2}}$　　D $\left(\frac{g}{l}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$

4. 一人站在有光滑固定转轴的转动平台上,双臂伸直水平地举起二哑铃,在该人把此二哑铃水平收缩到胸前的过程中，人、哑铃与转动平台组成的系统的：　C

（A）机械能守恒，角动量守恒；

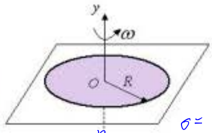
（B）机械能守恒，角动量不守恒；

（C）机械能不守恒，角动量守恒； ✓

（D）机械能不守恒，角动量不守恒。

5. 某滑冰运动员转动的角速度原为 ω_0，转动惯量为 J_0，当他收拢双臂后，转动惯量减少 $1/4$，这时他转动的角速度变为 $\underline{\frac{4}{3}\omega_0}$；他若不收拢双臂，而被另一滑冰运动员施加作用，使他转动的角速度变为 $\sqrt{2}\omega_0$，则另一滑冰运动员对他施加力矩所作的功 $W=\underline{\frac{1}{2}J_0\omega_0^2}$。

6. 如图，粗糙水平桌面上有一圆盘，质量为 m，半径为 R，在外力的作用下绕其固定的中心轴 oy 旋转，角速度为 ω，撤去外力后在摩擦阻力作用下逐渐变慢至停止，该过程中摩擦力做功为 $\underline{-\frac{1}{4}mR^2\omega^2}$；

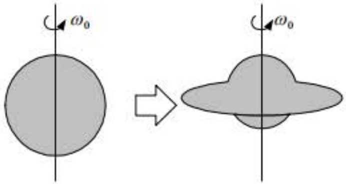


$I=\int_0^R 2\pi r\,dr\cdot r^2\sigma$　　$\sigma=\frac{m}{\pi R^2}$

$=2\pi r^3 dr$

$=\frac{\pi}{2}R^4$　$=\frac{1}{2}mR^2$

7. 一气体云组成的球状弧立天体，绕通过球心的自转轴转动，转动惯量为 I_0，角速度为 ω_0，由于气体自身的引力作用，气体云沿径向坍缩，经过若干年后变为如图所示的形状，此时它的转动动能为原来的三倍，则此时它的自转角速度为多少？相对于自转轴的转动惯量是多少？



解：初始动能 $E_K = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$

末态动能 $E_K = \frac{3}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

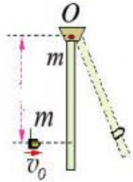
角动量守恒 $I_0 \omega_0 = I \omega$.

所以 $\frac{3}{2} I \omega \omega_0 = \frac{1}{2} I \omega^2$

$\Rightarrow \omega = 3\omega_0$

$I = \frac{1}{3} I_0$

8. 一长为 l，质量为 m 的竿可绕支点 O 自由转动。一质量同为 m 的子弹以水平速度 v_0 射入竿内距支点为 $\frac{2}{3}l$ 处，与竿一起转动，求(1) 两物体开始一起转动时竿的角速度 ω 和子弹速度 v；(2)竿的最大偏转角 θ_m 。



解：(1) 子弹射入杆的过程相对于O点角动量守恒

杆的转动惯量 $J = \frac{1}{3} m l^2$

角动量守恒：

$m v_0 \frac{2}{3} l = \left(m \left(\frac{2}{3} l\right)^2 + \frac{1}{3} m l^2\right) \omega$

$\omega = \dfrac{\frac{2}{3} v_0 l}{\frac{7}{9} l^2} = \frac{6}{7} \frac{v_0}{l}$

子弹速度 $v = \omega \frac{2}{3} l = \frac{4}{7} v_0$

(2) 杆上升的过程，机械能守恒

$\frac{1}{2} I \omega^2 = mg \frac{l}{2} (1-\cos\theta) + mg \frac{2}{3} l (1-\cos\theta)$

$\cos\theta = 1 - \dfrac{I\omega^2}{mgl}$

$= 1 - \dfrac{4 v_0^2}{21 g l}$

最大转角 $\theta_m = \arccos\left(1 - \dfrac{4 v_0^2}{21 g l}\right)$

9. **思考题**

如果一个质点系的总角动量等于零，能否说此质点系中每一个质点都是静止的？如果一质点系的总角动量为一常值，能否说作用在质点系上的合外力为零？

刚体转动小结

一、教学要求:

了解转动惯量概念。理解刚体绕定轴转动的转动定律和刚体在绕定轴转动情况下的角动量守恒定律、动能定理。

二、内容提要

刚体的定轴转动

1.运动学：与圆周运动中角量描述相同

2.动力学：

力矩　$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{M}=\sum \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$, $\boldsymbol{M}=\int \boldsymbol{r}\times \mathrm{d}\boldsymbol{F}$

转动惯量　$J_z=\sum r_i^2\Delta m_i$ ，　$J_z=\int_m r^2 dm$;

转动定律　$\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$　　$M_z=J_z\alpha$;

质点角动量　$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$,

刚体角动量　$\boldsymbol{L}=J\boldsymbol{\omega}$　　$L_z=J_z\omega_z$;

角动量原理　$\int_0^t \boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}_0$;　$\int_0^t M_z\mathrm{d}t=L_z-L_{0z}$

角动量守恒　$\boldsymbol{M}=0$, $\boldsymbol{L}$=恒量；　$M_z=0$, L_z=恒量

力矩的功　$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z \mathrm{d}\theta$,

功率　$P=\mathrm{d}A/\mathrm{d}t=M_z\omega$;

转动动能　$E_k=J_z\omega^2/2$,

刚体定轴转动的动能定理

$A=\int M_z d\theta=J_z\omega^2/2-J_z\omega_0^2/2$

$x=3t-4t^2+t^3$

$v=3-8t+3t^2$

$a=-8+6t$

$\vec{F}=ma=-8+6t$

$I=\int_0^4 F\cdot dt=-8t+3t^2\Big|_0^4$

$=-32+24=-8$

力学测试

一、填空题

1.（本题 2 分）

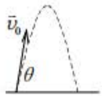
一质点沿 x 方向运动，其加速度随时间变化关系为：

$a=3+2t$(SI)，如果初始时刻质点的速度 $v_0=5m/s$，则 t 为 3s 时质点的速度为 __23m/s__。

2.（本题 4 分）

一物体作斜抛运动，初速度 $\vec{v}_0$ 与水平方向夹角为 θ，如图所示．物体轨道最高点处的曲率半径 ρ 为 __$v_0^2\cos^2\theta/g$__。已知质点的运动学方程为 $\vec{r}=(5+2t-\frac{1}{2}t^2)\vec{i}+(4t+\frac{1}{3}t^3)\vec{j}$ (SI)

当 t＝2 s 时，加速度的大小为 a = __$\sqrt{17}$ m/s^2__ 。



113
−102
11

$16\times(-6+41)-96$
$+72)$

3.（本题 4 分）

一个力 F 作用在质量为 1.0 kg 的质点上，使之沿 x 轴运动．已知在此力作用下质点的运动学方程为 $x=3t-4t^2+t^3$ (SI)．在 0 到 4 s 的时间间隔内，

(1) 力 F 的冲量大小 I= __8 N·s__。

$-96+41\times16-24\times64$
$+9\times128$

(2) 力 F 对质点所作的功 W = __176 J__。

$-24t+41t^2-24t^3$
$+\frac{9}{2}t^4$

$W=\int\vec{F}\cdot d\vec{x}$

$=\int_0^4(-8+6t)(3-8t+3t^2)\,dt$

$=\int_0^4(-24+t(64+18)+t^2(-24-48)+18t^3)\,dt$

4.（本题 2 分）一质量为 60 kg 的人起初站在一条质量为 300 kg，且正以 2 m/s 的速率向湖岸驶近的小木船上，湖水是静止的，其阻力不计．现在人相对于船以一水平速率 v 沿船的前进方向向河岸跳去，该人起跳后，船速减为原来的一半，v=__6 m/s__。

5.（本题 2 分）　$360\times2 = 300\times1 + 60(v+1) \Rightarrow v=6$

质量为 20 g 的子弹沿 X 轴正向以 500 m/s 的速率射入一木块后，与木块一起仍沿 X 轴正向以 50 m/s 的速率前进，在此过程中木块所受冲量的大小为 __9N·S__

$18g \times 50\,m/s = 9\,kg\cdot m/s$

6.（本题 3 分）

质量为 0.05 kg 的小块物体，置于一光滑水平桌面上．有一绳一端连接此物，另一端穿过桌面中心的小孔（如图所示）．该物体原以 3 rad/s 的角速度在距孔 0.2 m 的圆周上转动．今将绳从小孔缓慢往下拉，使该物体之转动半径减为 0.1 m．则物体的角速度 ω =__6 rad/s__。

7.（本题 3 分）

一质量为 m 的轮船受到河水阻力为

$F = -kv$，设轮船在速度 $\bar{v}_0$ 时关闭　　$-kv = mv\frac{dv}{dx}$

发动机，则船还能前进的距离为 __$\frac{mv_0}{k}$__。　$-\frac{k}{m}dx = dv$

8.（本题 3 分）

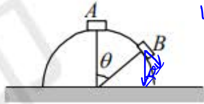
一无风的下雨天，一列火车以 20.0m/s 的速度匀速前进，在车内的旅客看见玻璃窗外的雨滴和竖直方向成 45° 角度下降，则雨滴下落的速度为__20m/s__。

二、选择题

1. 质点的质量为 m，置于光滑球面的顶点 A 处(球面固定不动)，如图所示．当它由静止开始下滑到球面上 B 点时，它的加速度的大小为　D

A　$a = 2g(1-\cos\theta)$．　　　B　$a = g\sin\theta$．

C　$a = g$　　　　D　$a = \sqrt{4g^2(1-\cos\theta)^2 + g^2\sin^2\theta}$



$v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$

$a_n = \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\theta)$

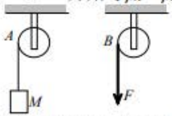
$a_t = g\sin\theta$

$4g^2(1-\cos\theta)^2 + g^2\sin^2\theta$

2. 如图所示，A、B 为两个相同的绕着轻绳的定滑轮．A 滑轮挂一质量为 M 的物体，B 滑轮受拉力 F，而且 $F=Mg$．设 A、B 两滑轮的角加速度分别为 β_A 和 β_B，不计滑轮轴的摩擦，则有　D

A　$\beta_A=\beta_B$．　B　$\beta_A>\beta_B$．

C　$\beta_A<\beta_B$．　D　开始时 $\beta_A=\beta_B$，以后 $\beta_A<\beta_B$．



3. 一人造地球卫星到地球中心 O 的最大距离和最小距离分别是 R_A 和 R_B．设卫星对应的角动量分别是 L_A、L_B，动能分别是 E_{KA}、E_{KB}，则应有　E

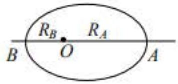
A　$L_B > L_A$，$E_{KA} > E_{KB}$．

B　$L_B > L_A$，$E_{KA} = E_{KB}$．

C　$L_B = L_A$，$E_{KA} = E_{KB}$．

D　$L_B < L_A$，$E_{KA} = E_{KB}$．

E　$L_B = L_A$，$E_{KA} < E_{KB}$．



4. 一质量为 60 kg 的人站在一质量为 60 kg、半径为 1 m 的均匀

圆盘的边缘，圆盘可绕与盘面相垂直的中心竖直轴无摩擦地转动，系统原来是静止的。后来人沿圆盘边缘走动，当他相对圆盘的走动速度为 2m/s 时，圆盘角速度为 D

A　1rad/s；　　B　2rad/s；

C　2/3rad/s；　　D　4/3rad/s。

$J_1 = 30\ kg\cdot m^2$

$J_2 = 60\ kg\cdot m^2$

5. 对于沿曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：　B

A　切向加速度必不为零；

B　法向加速度必不为零（拐点处除外）；

C　由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

D　若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；

E　若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动.

6. 一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为　D

A $\dfrac{dr}{dt}$　　B $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

C $\dfrac{d|\vec{r}|}{dt}$　　D $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

三、 质点在 xoy 平面内运动，其运动方程为 $\vec{r} = 2.0t\vec{i} + (19.0-2.0t^2)\vec{j}(SI)$，试求：（1）质点的轨迹方程；（2）$t = 1s$ 到 $t = 2s$ 这段时间内质点的平均速度；（3）任意时刻质点的速度、切向加速度和法向加速度。

解：(1) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 19-2t^2 \end{cases}$

轨迹方程：$x^2 + 2y = 38$

(2) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j}$

$t=1s$ 时 $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 17\vec{j}$ (m)

$t=2s$ 时 $\vec{r}_2 = 4\vec{i} + 11\vec{j}$ (m)

平均速度

$\vec{\bar{v}} = \dfrac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{\Delta t} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$ (m/s)

(3) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -4\vec{j}$

速度方向与竖直方向夹角θ满足

$\tan\theta = \dfrac{2}{4t} = \dfrac{1}{2t}$

$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

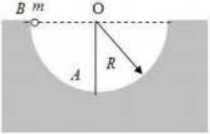
$\cos\theta = \dfrac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}$

$v_x = 2$, $v_y = -4t$, θ

$a_\tau = a\cos\theta = \dfrac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}$

$a_n = a\sin\theta = \dfrac{4}{\sqrt{1+4t^2}}$

四、 一质量为 M 的具有半径为 R 的半球形凹槽的物体静止在光滑的水平面上，凹槽表面也光滑，现在 B 点放置一质量为 m 的小球，释放后小球处于最低位置 A 时物体对小球的作用力。



解：以地面为参照系：

水平方向动量守恒

$mv + MV = 0$　①

机械能守恒

$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$　②

①②两式联立可解出 v, V

$v = M\sqrt{\dfrac{2gR}{M(m+M)}}$

$V = m\sqrt{\dfrac{2gR}{M(m+M)}}$

以凹槽为参照系，

当小球运动到最低位置时，

$a_M = 0$，是惯性系

$v' = v + V$

$= (m+M)\sqrt{\dfrac{2gR}{M(m+M)}}$

$= \sqrt{\dfrac{2gR(m+M)}{M}}$

小球的运动方程

$N - mg = m\dfrac{v'^2}{R}$

$N = mg + \dfrac{2mg(m+M)}{M}$

$= 3mg + \dfrac{2m^2}{M}g$

五、 一个质量为 m 的雨滴在下落过程中受到空气阻力，阻力大小与速度成正比，比例系数为 k，以下落点为计时零点，雨滴此时速度为零，求：（1）雨滴下落速度与时间的关系函数；（2）雨滴下落的终极速度？

解(1) 建立坐标系，竖直向下为正方向.

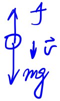
$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{k}{m}dt = \frac{dv}{v - mg/k}$$

$$\int_0^t \left(-\frac{k}{m}\right)dt = \int_0^v \frac{dv}{v - mg/k}$$

$$-\frac{k}{m}t = \ln\frac{v - mg/k}{mg/k}$$

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$



(2) 当 $t=\infty$ 时

$$v = \frac{mg}{k}$$

六、 在留声机的转盘绕通过盘心垂直盘面的轴以角速度 ω 做匀速转动。放上唱片后，唱片将在摩擦力作用下随转盘一起转动. 设唱片的半径为 R，质量为 m，它与转盘间的摩擦系数为 μ，求：（1）唱片与转盘间的摩擦力矩；（2）唱片达到角速度 ω 时需要多长时间；(3)在这段时间内，转盘的驱动力矩做了多少功？

解：(1) 取在半径为 r 处的圆环 dr.

$$dm = \rho\, 2\pi r\, dr$$

$$df = \mu\, dm g = \mu\rho g\, 2\pi r\, dr$$

力矩 $dM_f = f \cdot r = \mu\rho g\, 2\pi r^2 dr$

总力矩 $M_f = \int_0^R \mu\rho g\, 2\pi r^2 dr = \frac{2}{3}\pi R^3 \mu\rho g$

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2}$$

$$M_f = \frac{2}{3}\mu m g R$$

(2) 根据 $M_f = J\alpha$

$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\alpha = \frac{4}{3}\frac{\mu g}{R}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$d\omega = \alpha\, dt$$

$$\Delta t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{3R}{4\mu g \alpha}$$

(3) 动能定理：

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$